



Associazione
per l'Insegnamento
della Fisica

CONGRESSO AIF

GIARDINI NAXOS
24-27 OTTOBRE 2018



LICEO SCIENTIFICO STATALE GALILEO GALILEI TRIESTE

Risonanza e stati stazionari

Vengono presentate delle esperienze di Laboratorio che, prendendo come pretesto lo studio di un circuito RLC forzato con una tensione sinusoidale di frequenza variabile, hanno come obiettivo quello di introdurre studenti di quinta liceo, allo studio degli stati stazionari di un sistema e del fenomeno della risonanza.

Si analizza il significato di **modi normali** di vibrazione studiando il sistema costituito da due e tre pendoli accoppiati. Si trovano, sia sperimentalmente che analiticamente, gli stati stazionari del sistema e si verifica sperimentalmente che una qualunque oscillazione si può ottenere con una opportuna combinazione lineare di tali stati.

Risonanza e stati stazionari

Si riproduce il comportamento di un circuito RLC prendendo come modello il sistema massa-molla opportunamente forzato e smorzato attraverso l'utilizzo di un magnete e di campi magnetici di frequenza variabile.

Si studia la curva di risonanza del sistema che riproduce esattamente quella di un circuito RLC.

Il sistema si presta allo studio del trasporto di segnali, ad esempio, attraverso la modulazione di ampiezza.

Lo studio può essere utilizzato come introduzione agli stati stazionari in meccanica quantistica

Analisi dei Modi Normali

Gli stati stazionari di un sistema periodico sono caratterizzati dal fatto che ogni parte del sistema oscilla con la stessa frequenza e ampiezza.

Ogni altro stato del sistema può essere descritto come sovrapposizione di stati stazionari.

Analisi dei Modi Normali

Una molla ha un solo modo di vibrazione perché ha un solo grado di libertà



Una corda ha infiniti stati stazionati perché infiniti sono i gradi di libertà necessari per descrivere il sistema



Analisi dei Modi Normali



Più pendoli accoppiati hanno tanti stati stazionari quanti sono il loro numero



Analisi dei Modi Normali

Le equazioni del moto per tre pendoli identici collegati fra loro mediante due molle identiche si scrivono:

$$\ddot{y}_1 = -\frac{k}{m}(y_1 - y_2) - \omega_0^2 y_1$$

$$\ddot{y}_2 = -\frac{k}{m}(y_2 - y_1) - \frac{k}{m}(y_2 - y_3) - \omega_0^2 y_2$$

$$\ddot{y}_3 = -\frac{k}{m}(y_3 - y_2) - \omega_0^2 y_3$$

$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ e y_1, y_2, y_3 sono gli spostamenti dei pendoli dalla posizione di equilibrio.

Analisi dei Modi Normali

Cerchiamo soluzioni in cui i tre pendoli oscillano con la stessa frequenza ω cioè poniamo

$$y_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$$

Posto $\lambda = \omega^2 - \omega_0^2$ le equazioni diventano:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Analisi dei Modi Normali

Affinché si abbiano soluzioni non nulle deve accadere che:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \lambda & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \lambda & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\frac{k}{m} - \lambda\right) \left(\lambda^2 - 3\lambda \frac{k}{m}\right) = 0$$

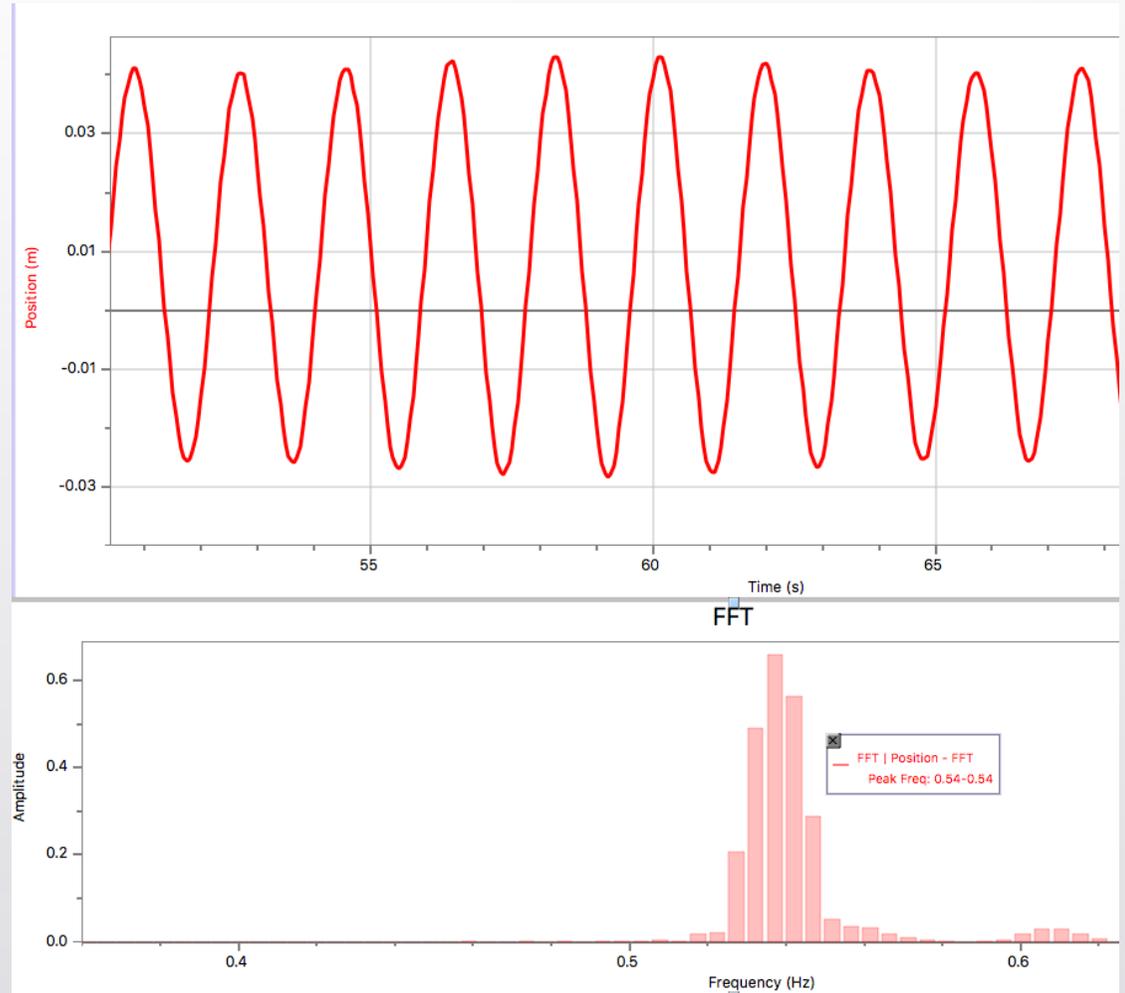
Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{k}{m} \quad e \quad \lambda_3 = 3\frac{k}{m} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\omega_1^2 = \omega_0^2; \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{k}{m}; \quad \omega_3^2 = \omega_0^2 + 3\frac{k}{m}$$

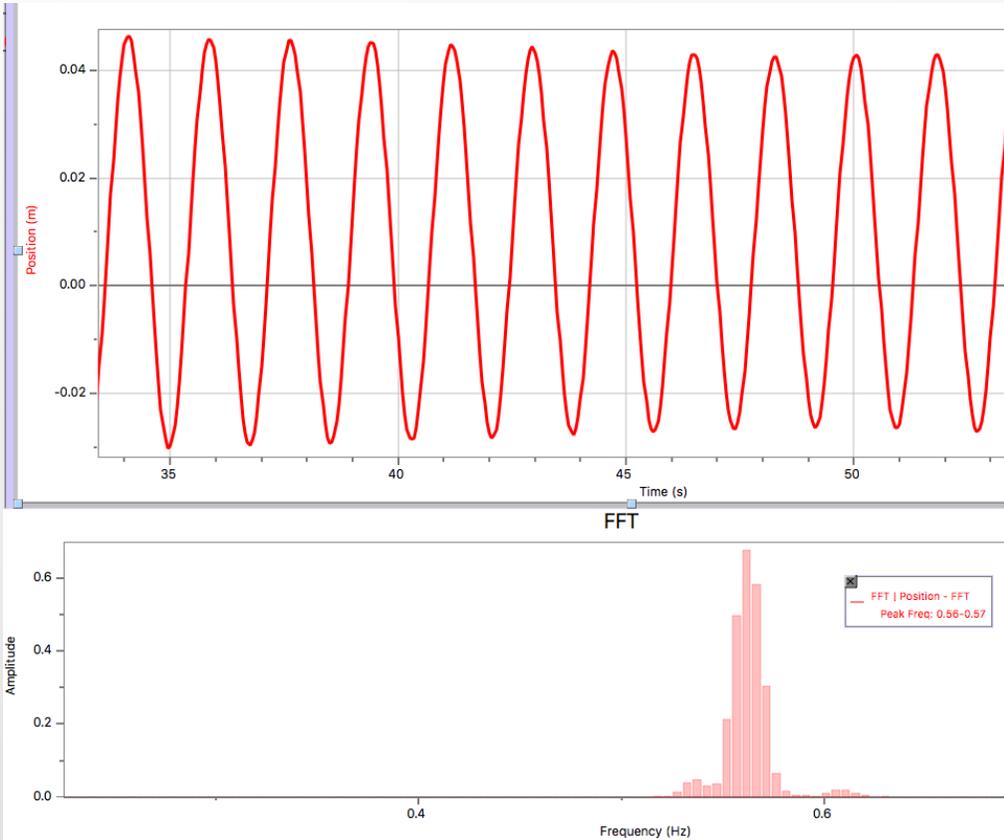
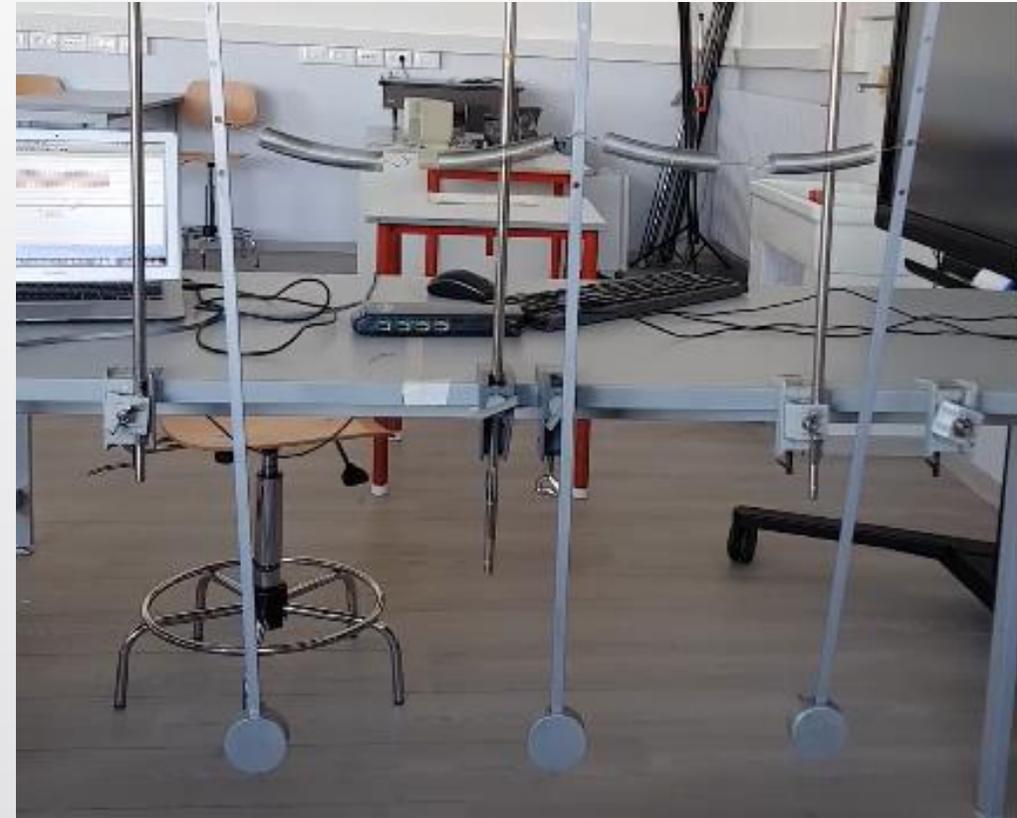
Analisi dei Modi Normali



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_1^2 = \omega_0^2 \approx 11,51 \text{ Hz}^2$$

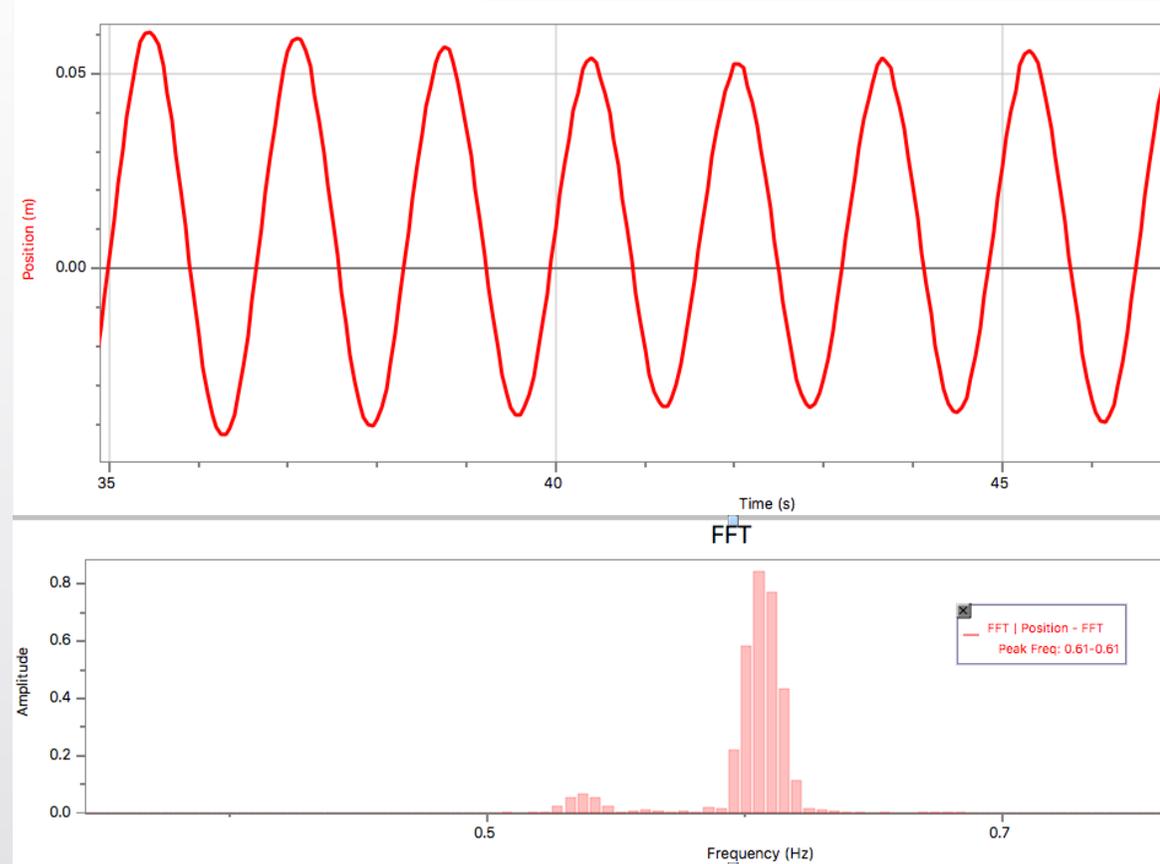


Analisi dei Modi Normali



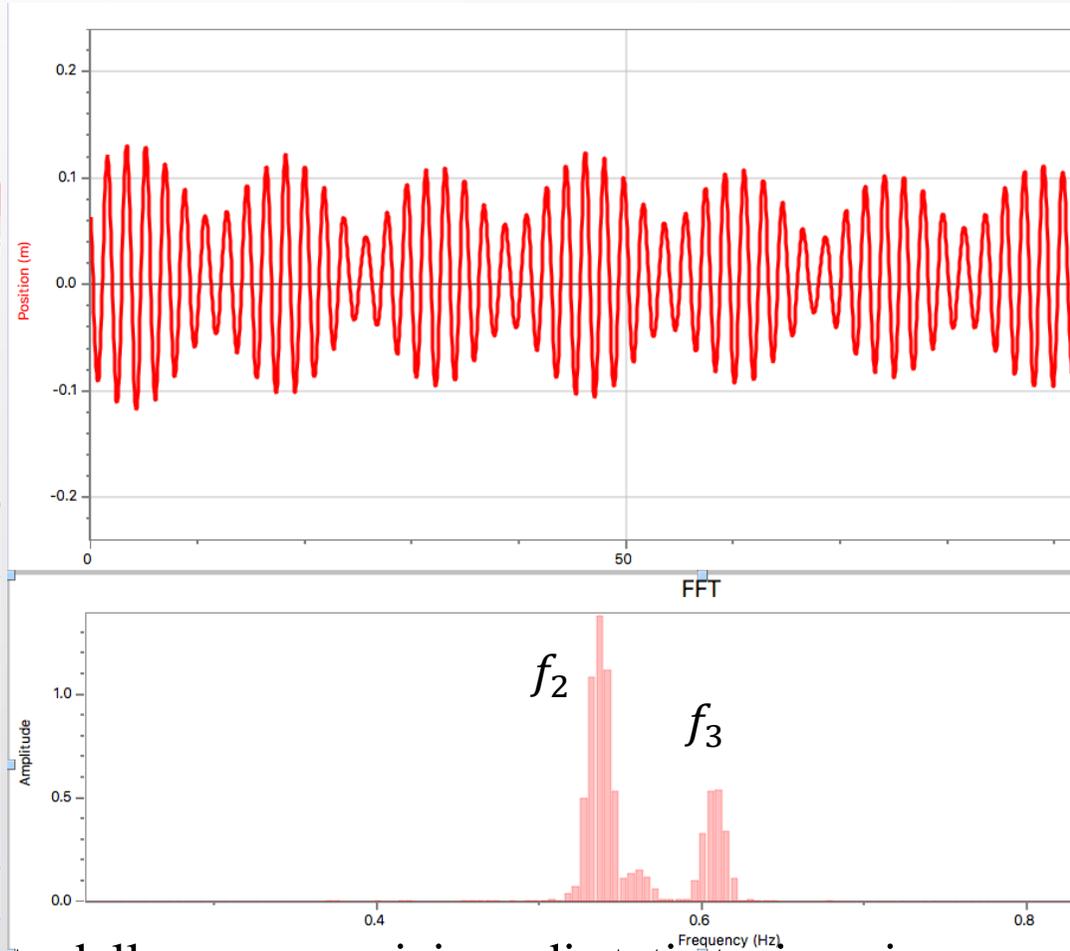
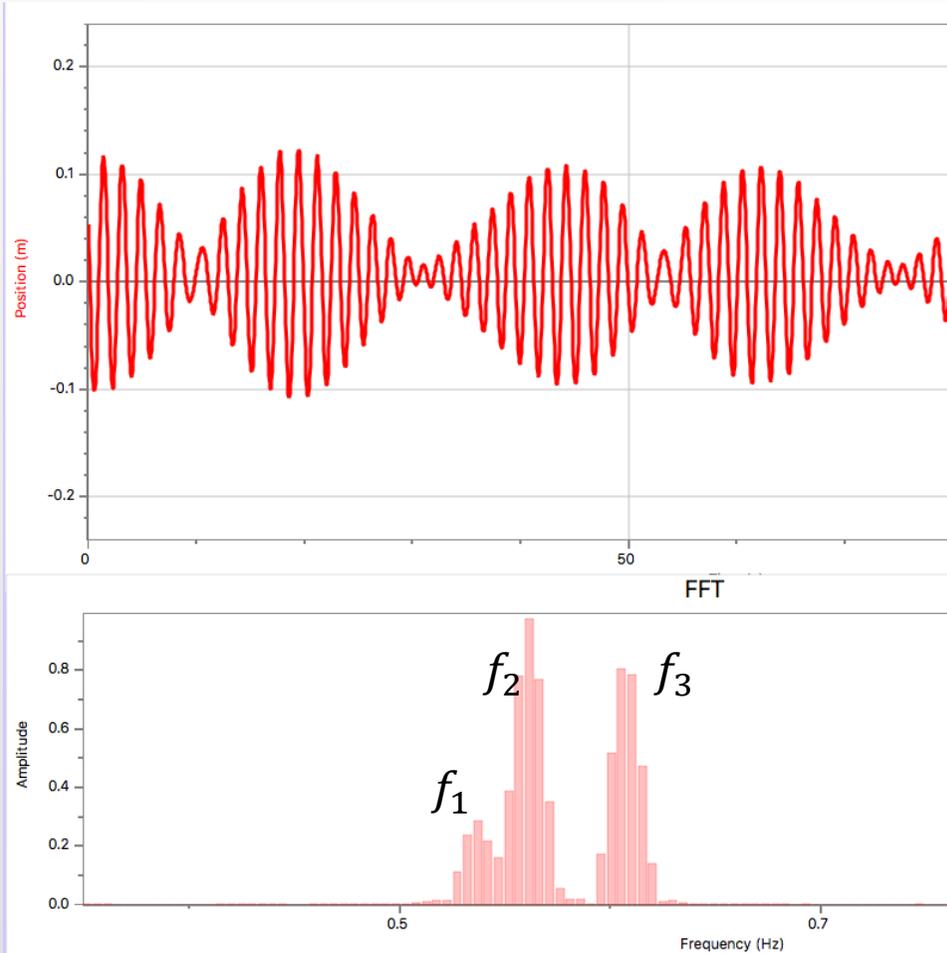
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{k}{m} \approx 11,51 + 1,05 \approx 12,6 \text{ Hz}^2$$

Analisi dei Modi Normali



$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_3^2 = \omega_0^2 + 3 \frac{k}{m} \approx 11,51 + 3 \cdot 1,05 \approx 14,67 \text{ Hz}^2$$

Analisi dei Modi Normali



Una qualunque oscillazione dei pendoli è data dalla sovrapposizione di stati stazionari.

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Un circuito RLC forzato si comporta come un sistema massa molla smorzato e forzato

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{LC} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

Facendo le sostituzioni:

$$L \rightarrow m ; \quad C \rightarrow \frac{1}{K} ; \quad R \rightarrow \lambda ; \quad Q(t) \rightarrow s(t) ; \quad V_0 \rightarrow F_0$$

l'equazione diventa formalmente identica a quella di un sistema massa-molla smorzato e forzato

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Gli stati stazionari di un sistema possono essere evidenziati dal fenomeno della risonanza:

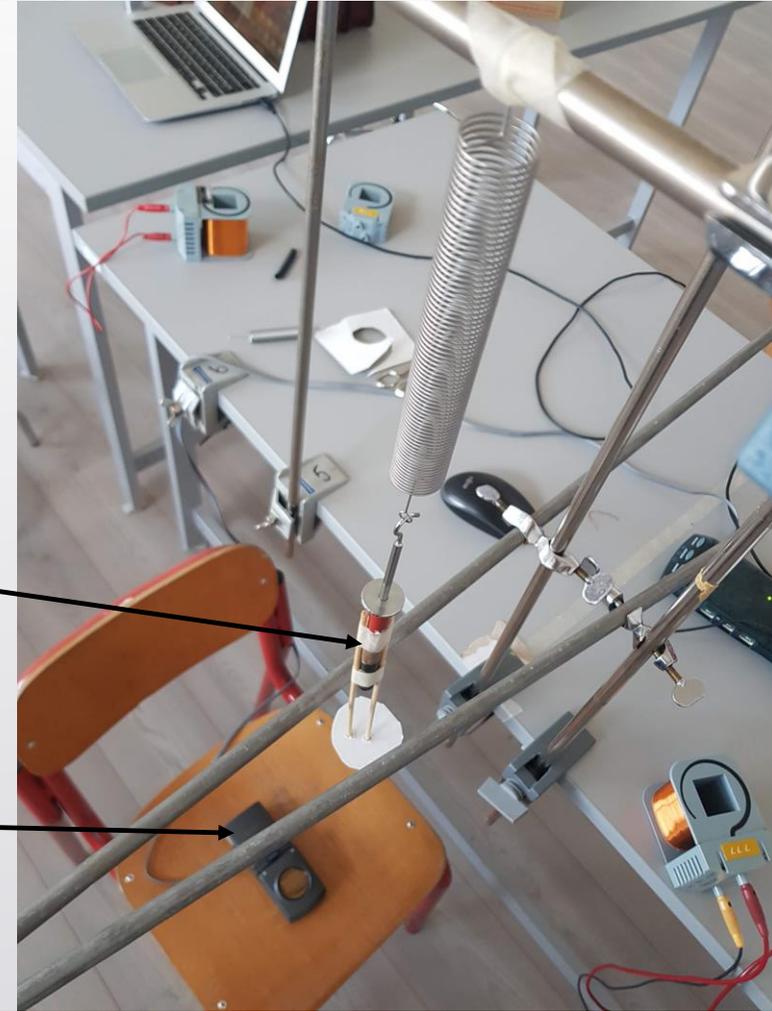
se il sistema viene forzato ad oscillare con una frequenza pari a quella di risonanza l'ampiezza dell'oscillazione aumenterebbe senza limiti se non ci fosse lo smorzamento.

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Il sistema è stato realizzato sospendendo una barretta cilindrica magnetica ad una molla, il sonar ne rileva la posizione in funzione del tempo.

magnete

sonar



Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Una bobina chiusa attraversata da un polo del magnete smorza le oscillazioni

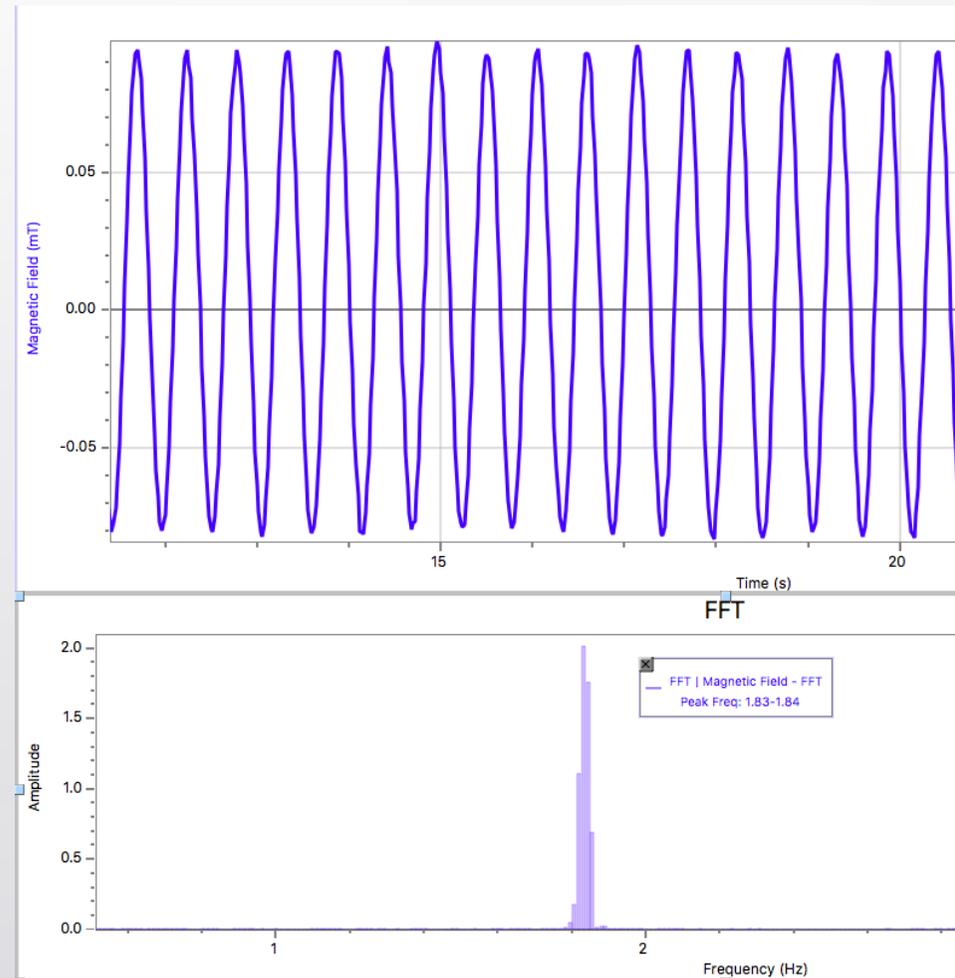
Il magnete è messo in oscillazione da un campo magnetico sinusoidale generato da un generatore d'onda collegato ad una seconda bobina attraversata dall'altro polo del magnete.



Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Campo magnetico di frequenza e ampiezza variabile generato da una bobina alimentata da un generatore d'onda di ampiezza e frequenza variabile.

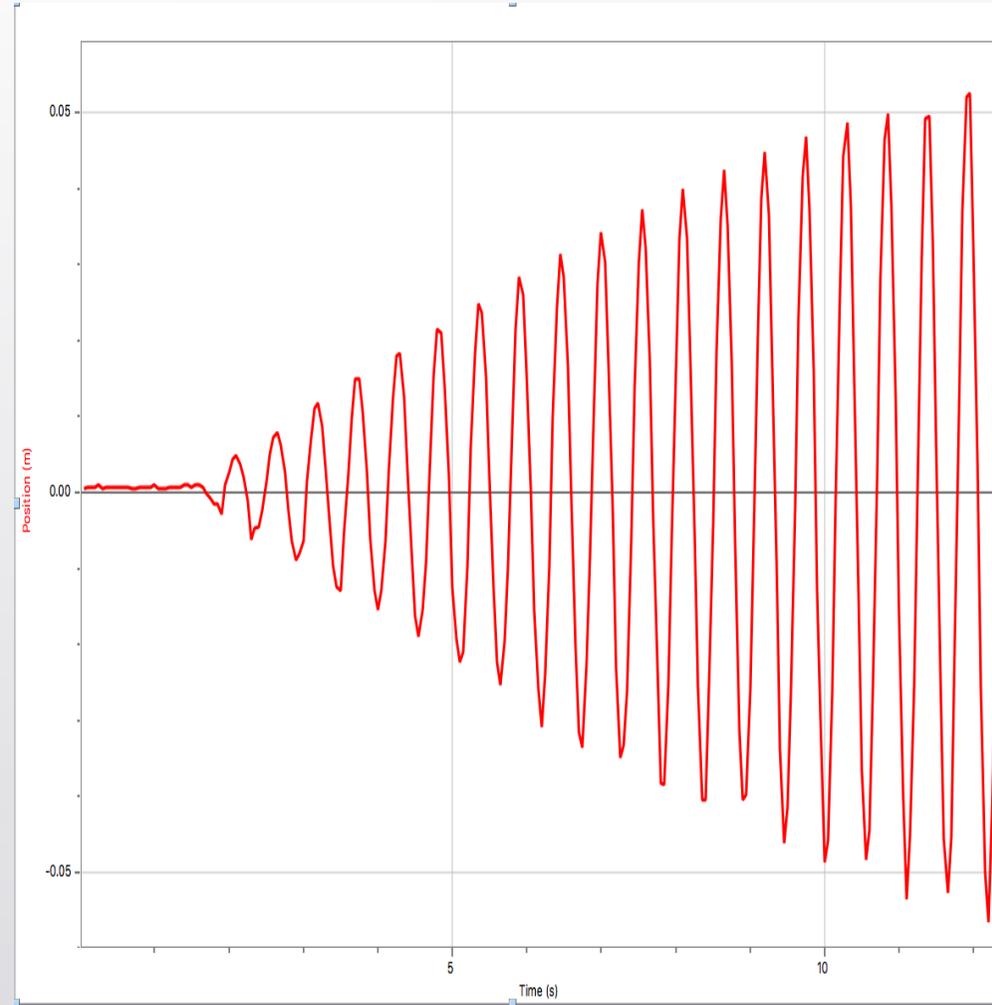
Un polo del magnete si trova sotto l'azione del campo.



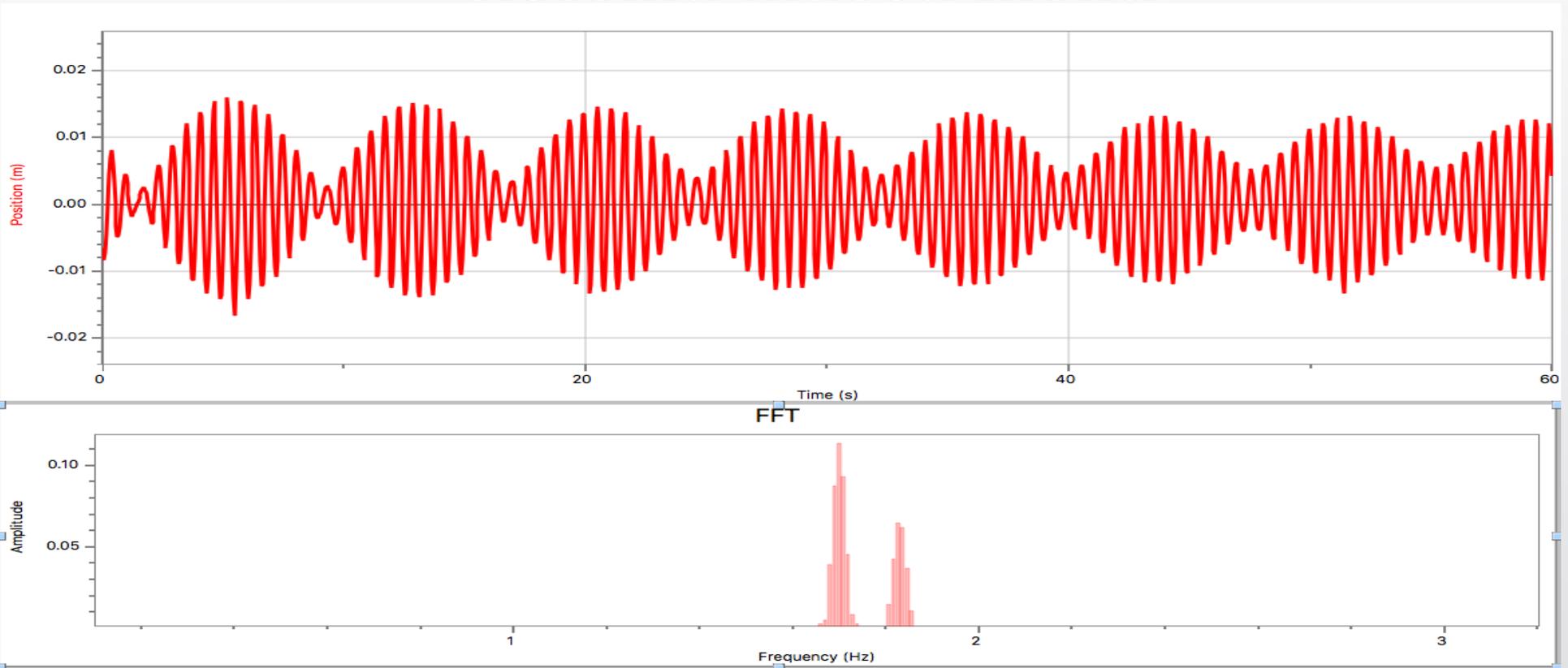
Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Il sistema non è smorzato (la bobina adibita alla smorzamento è aperta).

Se la frequenza del campo coincide con quella propria del sistema massa-molla il sistema va in risonanza: l'ampiezza di oscillazione aumenta indefinitamente.



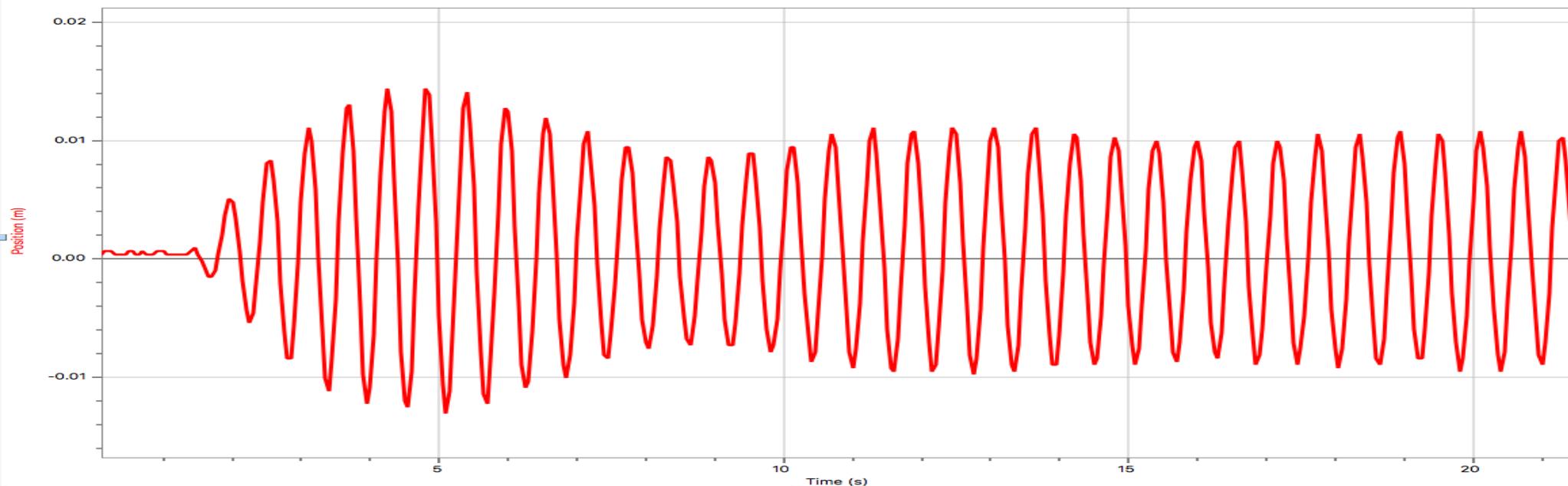
Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla



Se la frequenza del campo è vicina a quella naturale del sistema si verifica il fenomeno dei battimenti.

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

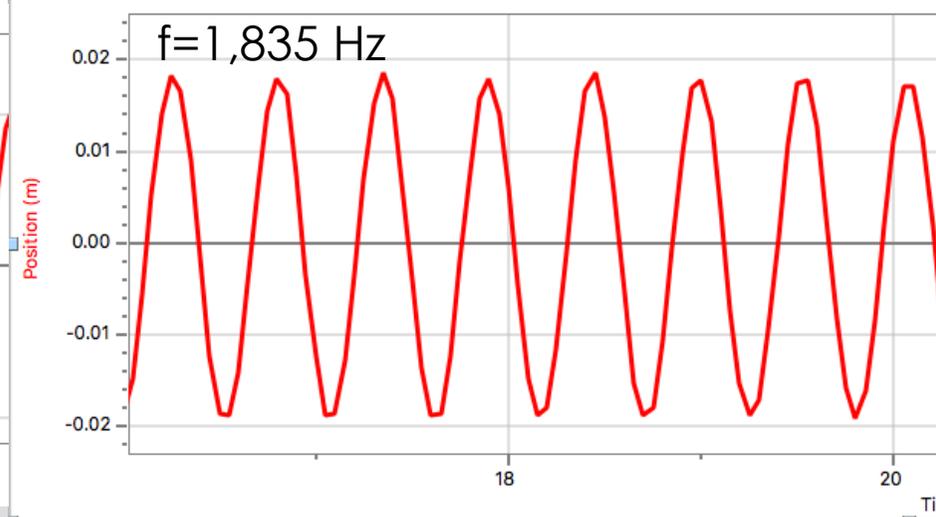
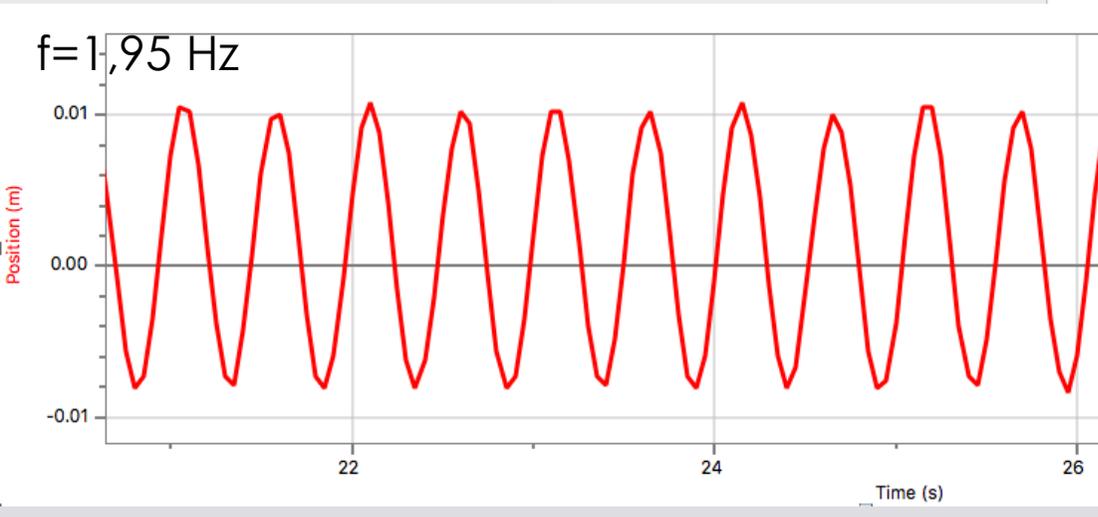
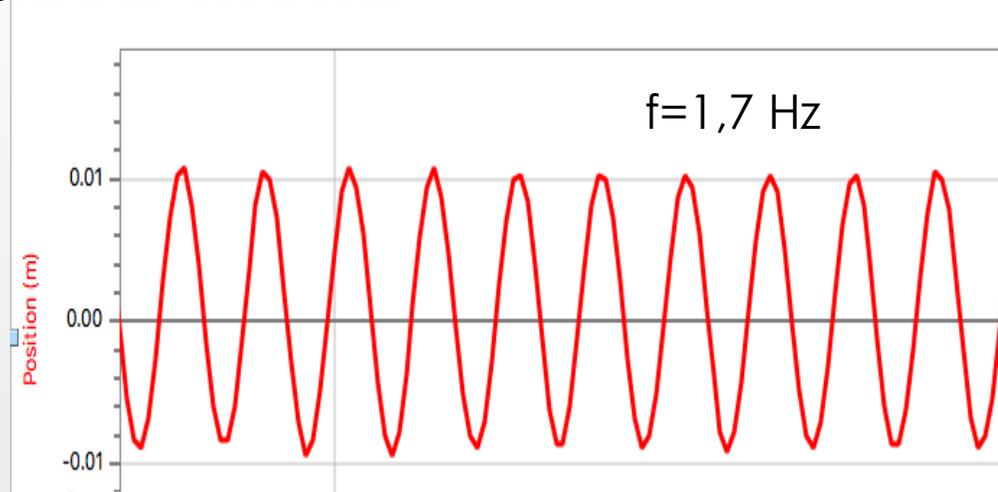
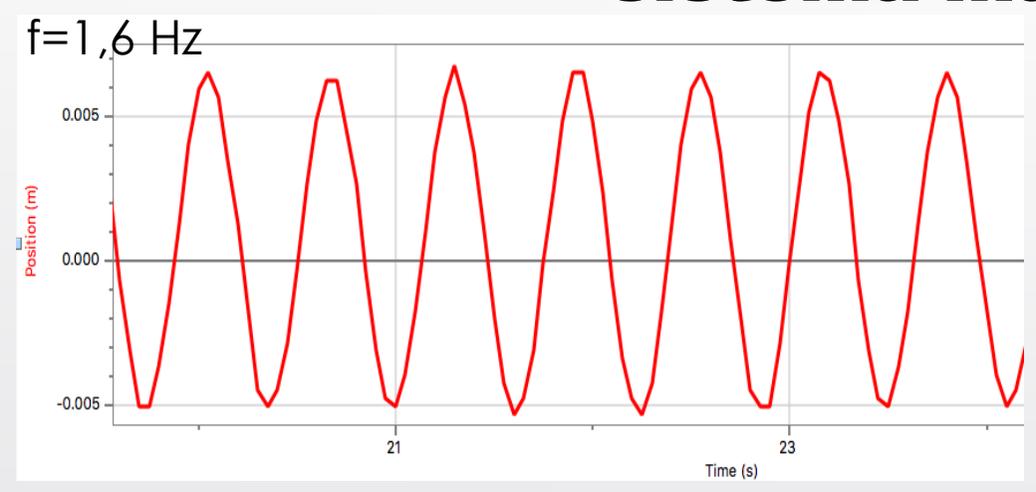
Il sistema è smorzato (si cortocircuita la bobina adibita allo smorzamento). Qualunque sia la frequenza del campo magnetico le oscillazioni libere si annullano rapidamente a causa dello smorzamento e rimangono solo quelle della forzante.



Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

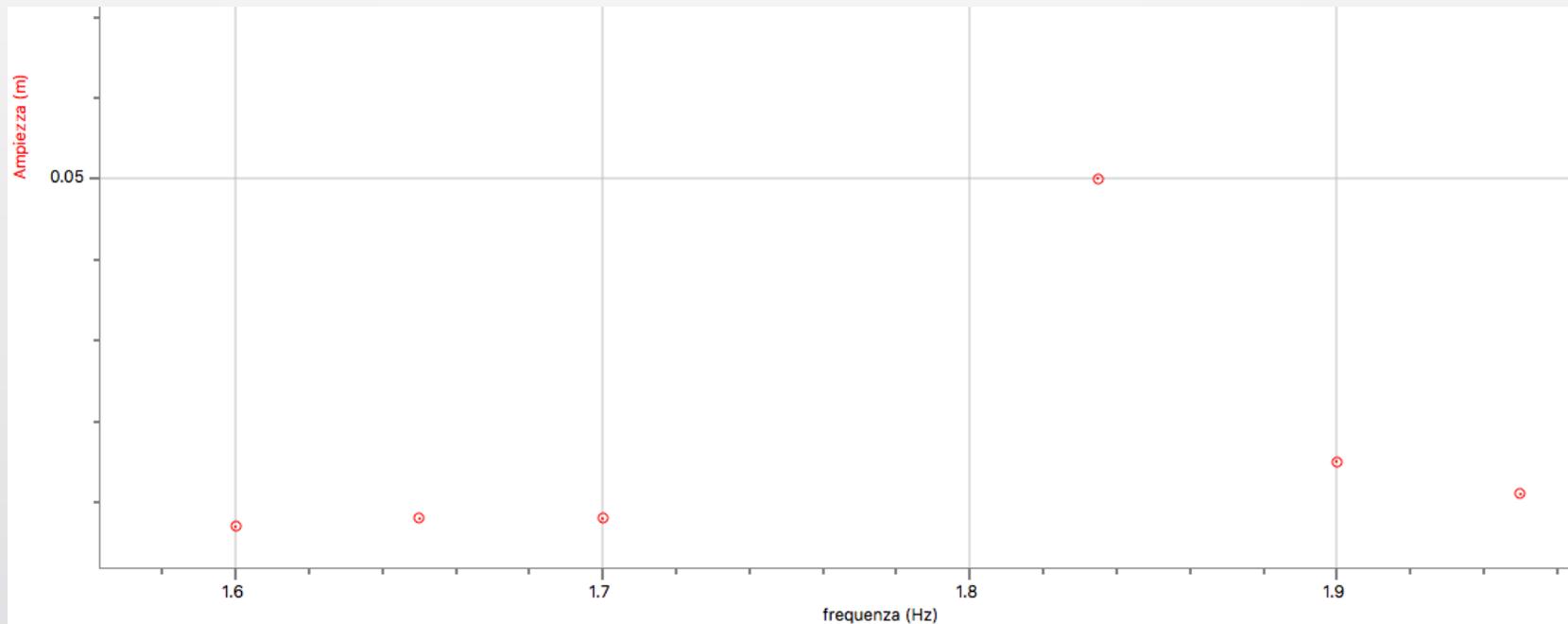
L'ampiezza delle oscillazioni varia con la frequenza, quella di risonanza ha ampiezza molto maggiore, allontanandosi dalla frequenza di risonanza l'ampiezza diminuisce.

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla



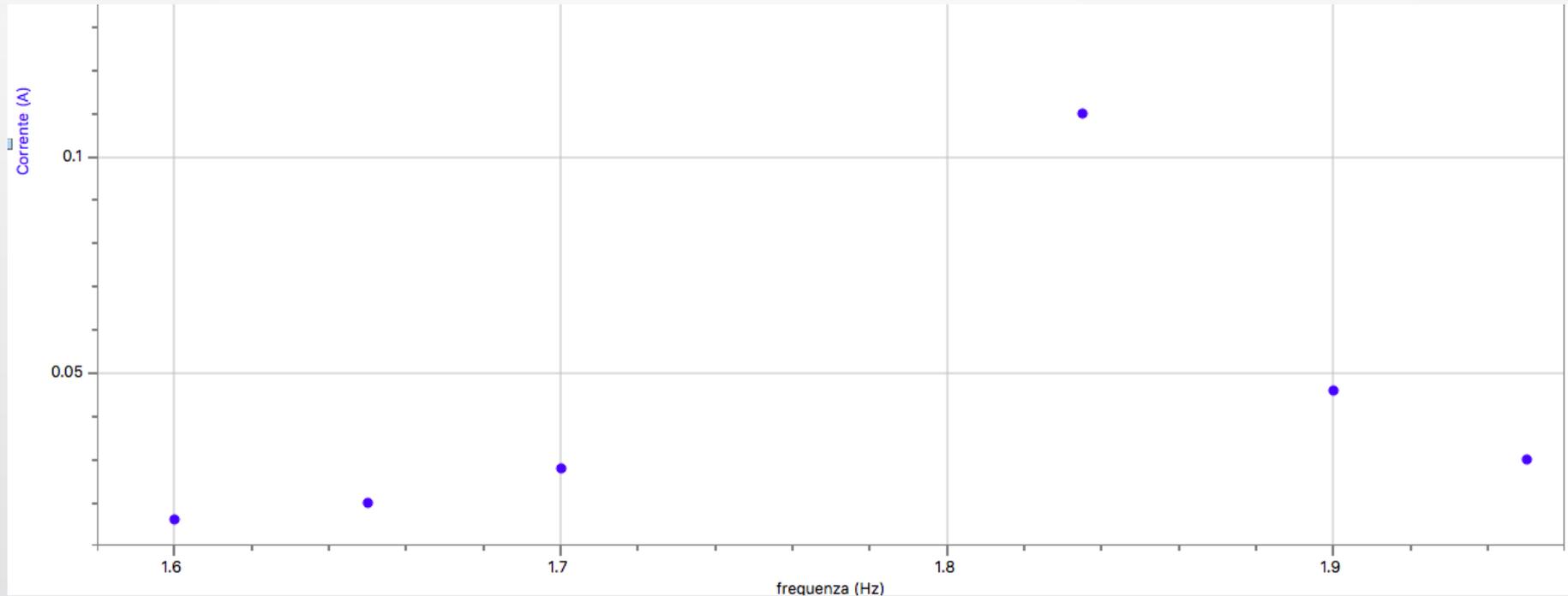
Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Si costruisce la curva di risonanza:



che può essere ottenuta misurando l'ampiezza di oscillazione in funzione della frequenza

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla



o misurando la corrente nella bobina utilizzata per lo smorzamento in funzione della frequenza

Analisi di un circuito RLC mediante lo studio del sistema massa molla

Il sistema può essere utilizzato per spiegare il trasporto di segnali utilizzando ad esempio la modulazione d'ampiezza.

Si costruisce un segnale sovrapponendo l'onda portante, che ha la frequenza di risonanza del sistema, con una modulante, di frequenza minore, che rappresenta il segnale da trasmettere.

La portante mette in risonanza il sistema che oscilla quindi con ampiezza diversa seguendo la modulante.

Leggendo la corrente nella bobina utilizzata per lo smorzamento si ottiene un segnale che ricostruisce quello in ingresso.